Sujet n°2: Optimisation *(énoncé)*

Le triangle ABC est rectangle en A.
On donne : $AB = 8$ et $AC = 6$ *(les mesures des longueurs étant exprimées en centimètres)*
M est un point de l'hypoténuse $[BC]$.
La perpendiculaire à (AB) passant par M coupe $[AB]$ en E.
La perpendiculaire à (AC) passant par M coupe $[AC]$ en F.
(Voir figure GEOGEBRA fournie)

Le but de l'activité est de déterminer où on doit placer le point M pour que la distance EF soit la plus petite possible ?

1) Sur la figure $GEOGEBRA$ fournie, rajouter la hauteur issue de A du triangle ABC et nommer H le pied cette hauteur.

2) En utilisant cette figure, déterminer quelle semble être la position du point M pour que la distance EF soit la plus petite possible.

....

3) Preuve :

a. Démontrer que le quadrilatère $AEMF$ est un rectangle, puis en déduire que $AM = EF$

....

b. - Quelle est la position du point M du segment $[BC]$ pour lequel la distance AM est minimale ? Justifiez votre réponse.

....

- En déduire la position du point M pour lequel la distance EF est minimale.

....

c. - Quelle est l'aire du triangle ABC ?

....

- Calculer BC.

....

- En déduire AH.

....

d. Quelle est la plus petite valeur prise par la longueur EF lorsque M se déplace sur le segment $[BC]$?

....

Sujet n°2: Optimisation *(correction)*

1) Voir figure.

2) En utilisant la figure dynamique, on peut conjecturer que la position pour laquelle la distance EF semble être la plus petite est lorsque M est confondu avec le pied H de la hauteur issue de A.
Ainsi, comme les diagonales d'un rectangle sont de même longueur, on a : $AM = EF$.

3) Preuve :

a. Le quadrilatère $AEMF$ est un rectangle car c'est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles *(par construction)*, il s'agit donc d'un parallélogramme et de plus il a un angle droit.

b. La distance d'un point à une droite est minimale lorsqu'on trace la perpendiculaire à cette droite passant par le point, donc ici lorsque l'on place M en H *(pied de la hauteur issue de A)*
Ainsi, la distance EF est minimale lorsque le point M est en H *(car $AM = EF$ d'après 1))*

c. - L'aire du triangle ABC est donnée par : $A_{ABC} = \frac{BASE \times HAUTEUR}{2} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{8 \times 6}{2} = 24\ cm^2$

- Pour déterminer BC, on utilise le théorème de Pythagore *(à rédiger)*, on trouve : $BC = 10\ cm$

- On peut aussi calculer l'aire de la façon suivante : $A_{ABC} = \frac{BASE \times HAUTEUR}{2} = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{10 \times AH}{2}$

Et donc, $AH = \frac{24}{5} = 4{,}8\ cm.$

d. *BILAN :* la longueur minimale pour EF est donc égale à $4{,}8\ cm$.